数理解析研究所講究録
207巻 1974年 42-53

Blowing-down の一つの例について

琉大 理工　森 泰子

1.　weakly 1-complete manifold に対する cohomology の消滅定理の応用の一つに、中野先生の、"Monoidal 変換の逆問題" がある。即ち、n 次元複素多様体 $\widetilde{X}$ の、余次元 1 の部分多様体 S が、或る m 次元複素多様体 M 上に、$\mathbb{P}^{r-1}$-bundle の構造をもっており ($m+r=n$, $r\geq 2$) line bundle $[S]$ を、各 fibre L_a 上に制限 (たとき $[S]_{L_a}=[e]^{-1}$ ($[e]$ は $\mathbb{P}^{r-1}$ の超平面の定義する line bundle) が成り立っているならば、M を含む、n 次元複素多様体 X があって、$\widetilde{X}$ は M を中心とする X の monoidal 変換となっているというものである。ここでは、同じ情況のもとで、$[S]_{L_a}=[e]^{-k}$ ($k\geq 2$) が成り立つ場合に、このような X (今度は、特異点が出てくる) を作ることを考える。

2.　$\mathbb{P}^{r-1}$ を k 次 Veronese 変換 $\hat{f}$ で $\mathbb{P}^N$ に埋め込む。即ち、$\mathbb{P}^{r-1}$ の斉次座標 $(\eta^1:\cdots:\eta^r)$ に対して、$\eta^1,\cdots,\eta^r$ の k 次

単項式 $M^p(\eta)$ $(p=1,\cdots,N+1={}_rH_k)$ 全体を斉次座標とする.
$\mathbb{P}^N$ の部分多様体が $f(\mathbb{P}^{r-1})=V$ である. V の cone $K\subset\mathbb{C}^{N+1}$ は, $\underbrace{\text{頂点 } (0)}_{\mathbb{C}^{N+1}\text{ の normal analytic set で}}$ を唯一つの特異点としてもつ. $\mathbb{C}^{N+1}$ を (0) を中心として blow-up して, $\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}$ を作る. $\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}$ は $\mathbb{P}^N$ 上の line bundle で, covering $U_p=\{(z^1:\cdots:z^{N+1})\in\mathbb{P}^N \mid z^p\neq 0\}$ $(p=1,\cdots,N+1)$ に関して transition functions $\{\frac{z^p}{z^q}\}$ で表わされる. $\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}$ 内の, K 上の部分を $\hat{K}$ とすれば, $\hat{K}$ は line bundle $(\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}\to\mathbb{P}^N)$ を V 上に制限したものになっている。$\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}\supset p^{-1}(0)\approx\mathbb{P}^N$ は line bundle $(\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}\to\mathbb{P}^N)$ の 0-section だから, $T\equiv p^{-1}(0)\cap\hat{K}$ も line bundle $(\hat{K}\to V)$ の 0-section である. $p:\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}-p^{-1}(0)\xrightarrow{\approx}\mathbb{C}^{N+1}-0$ から, $\hat{K}-T\approx K-0$ となっている. $\hat{K}$ の divisor T が定義する line bundle $[T]$ を T 上に制限すると,

$$[T]_T = T \text{ の } \hat{K} \text{ に於ける normal bundle}$$
$$= (\hat{K}\to V) = (\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}\to\mathbb{P}^N)|_V .$$

ここで, $M^{p_\alpha}(\eta)=(\eta^\alpha)^k$ $(\alpha=1,\cdots,r)$ とすれば, V は, r ケの $U_{p_\alpha}\supset\{(M^p(\eta))\in\mathbb{P}^N \mid (\eta^\alpha)^k\neq 0\}$ $(\alpha=1,\cdots,r)$ で cover される. 従ってこのとき, transition functions は $\frac{z^{p_\alpha}}{z^{p_\beta}}=\frac{(\eta^\alpha)^k}{(\eta^\beta)^k}=\left(\frac{\eta^\beta}{\eta^\alpha}\right)^{-k}$ である. 他方, $\mathbb{P}^{r-1}$ 上の line bundle $[e]$ は, covering $\{(\eta)\in\mathbb{P}^{r-1} \mid \eta^\alpha\neq 0\}$ $(\alpha=1,\cdots,r)$ に関して transition functions $\{\frac{\eta^\beta}{\eta^\alpha}\}$ で定義されるから $(\tilde{\mathbb{C}}^{N+1}\to\mathbb{P}^N)|_V$

$= [e]^{-k}$ である．故に 1) $\hat{K} - T \approx K - 0$ ，2) $\hat{K} \supset T$ (codim 1)，3) $T \xrightarrow{\mathbb{P}^{r-1}} 0$ ，4) $[T]_T = [e]^{-k}$ なる状態が得られた。

3.　［定理 1］（消滅定理）

weakly 1-complete manifold V と，V 上の line bundle B 及び canonical line bundle K_V に対して，$K_V^{-1} \otimes B > 0$ ならば

$$H^q(V, \mathcal{O}(B)) = 0 \quad (q = 1, \cdots, n-1).$$

証明の概略は，例えば 数理解析研究所講究録 116 の中野先生の"モノイダル変換の逆問題について"を見ればよい。

［定理 2(k)］ 考えている問題の情況のもとで，即ち

$$\hat{X} \supset \underset{M}{\overset{S}{\downarrow}}\big)\mathbb{P}^{r-1}, \quad [S]_{L_a} = [e]^{-k} \text{ for } {}^\forall a \in M$$

ならば，各点 $a \in M$ に対して，次の性質をもつ $\hat{X}$ に於ける L_a の近傍 V が存在する：

i) $V \cap L_b \neq \phi$ ならば $L_b \subset V$.

ii) V は weakly 1-complete manifold で，$\varepsilon = 1, 2$ に対して $K_V^{-1} \otimes [S]_V^{-\varepsilon} > 0$.

（証明） $a \in M$ を中心とする局所座標 $\zeta^1, \cdots, \zeta^m$ を，座標近傍 $D = \{ \zeta \in \mathbb{C}^m \mid \phi(\zeta) < 1 \}$ （$\phi(\zeta) \equiv \sum_{j=1}^{m} |\zeta^j|^2$） に

対して $\pi^{-1}(D) \approx D \times \mathbb{P}^{r-1}$ なるように取れば，$[S]_{D\times\mathbb{P}} = [e]^{-k}$ である（但し，$[e]$ は projection $D\times\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ で $D\times\mathbb{P}$ 上に引き戻している）．

$\mathbb{P}^{r-1}$ の斉次座標 $(\eta^1 : \cdots : \eta^r)$ に対して，$\xi_\alpha^\beta \equiv \frac{\eta^\beta}{\eta^\alpha}$ $(\beta = 1, \cdots, \hat{\alpha}, \cdots, r)$ は $U_\alpha = \{ (\eta) \in \mathbb{P}^{r-1} \mid \eta^\alpha \neq 0 \}$ 上の局所座標である．$D\times\mathbb{P}$ 上，$[e]$ は $(\{D\times U_\alpha\}, \{\frac{\eta^\beta}{\eta^\alpha}\})$ で定義される．$\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \frac{\eta^\beta}{\eta^\alpha} = \xi_\alpha^\beta$ とおく．

$a_\alpha \equiv e^{\phi(\zeta)} \sum_{\beta=1}^{r} |\xi_\alpha^\beta|^2$ なる fibre metric により $[e] > 0$ である．

$\tilde{X}$ の座標近傍 $\{V'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で次のようなものが取れる：

$V'_\lambda \cap S = D \times U'_\lambda$，$\mathbb{P} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U'_\lambda$ (finite)，$\{U'_\lambda\}$ は $\{U_\alpha\}$ の細分（細分 $\sigma : \Lambda \to \{1, \cdots, r\}$; $U'_\lambda \subset U_{\sigma(\lambda)}$）．

V'_λ 上の局所座標 $(z_\lambda^1, \cdots, z_\lambda^m, y_\lambda, x_\lambda^1, \cdots, \hat{x}_\lambda^{\sigma(\lambda)}, \cdots, x_\lambda^r)$ を次のように取る：

$V'_\lambda \cap S = \{ y_\lambda = 0 \}$，$z_\lambda^j|_S = \zeta^j$ $(j = 1, \cdots, m)$，$x_\lambda^\alpha|_S = \xi_{\sigma(\lambda)}^\alpha$ $(\alpha = 1, \cdots, r)$，$x_\lambda^{\sigma(\lambda)} \equiv 1$．

このとき $V' \equiv \bigcup_\lambda V'_\lambda$ は L_a の近傍で $V' \cap S = D\times\mathbb{P}$ である．又，$[S]_{V'}$ は $(\{V'_\lambda\}, \{\frac{y_\lambda}{y_\mu}\})$ で定義される．

$e_{\lambda\mu} \equiv \frac{y_\lambda}{y_\mu}$ とおくと $e_{\lambda\mu}|_S = \varepsilon_{\lambda\mu}{}^{-k}$ とできる（$\varepsilon_{\sigma(\lambda)\sigma(\mu)}$ を $\varepsilon_{\lambda\mu}$ と略記する）．

adjunction formular : $K_{V'\cap S} = K_{V'}|_{V'\cap S} \otimes [S]_{V'\cap S}$

から $K_{V'}|_{V'\cap S} = K_{D\times\mathbb{P}^{r-1}} \otimes [S]_{D\times\mathbb{P}}^{-1} = [e]^{-r}\otimes[e]^{k} = [e]^{-(r-k)}$ である。従って $K_{V'}$ は $(\{V'_\lambda\}, \{k_{\lambda\mu}\})$, $k_{\lambda\mu}|_S = \varepsilon_{\lambda\mu}^{-(r-k)}$ で表わされる。

$H^1(D\times\mathbb{P}, \mathcal{O}([e]^{\ell}))=0$ $(\ell\geqq 1)$ を使って、正則関数 $\zeta^j\in\Gamma(D\times U'_\lambda, \mathcal{O})$ $(j=1,\cdots,m)$, *holomorphic cross-sections* $\tau^p \equiv \left\{\frac{M^p(\eta)}{(\eta^{\alpha(\lambda)})^k}\right\}_\lambda \in\Gamma(V'\cap S, \mathcal{O}([e]^k))$ $(p=1,\cdots,N+1)$ 及び $\omega^p(\varepsilon) \equiv \left\{\frac{N^p(\eta)}{(\eta^{\alpha(\lambda)})^{r+(\varepsilon-1)k}}\right\}_\lambda \in\Gamma(V'\cap S, \mathcal{O}([e]^{r+(\varepsilon-1)k}))$ $(p=1,\cdots, {}_rH_{r+(\varepsilon-1)k})$ $(N^p(\eta)$ は $\eta^1,\cdots,\eta^r$ の $r+(\varepsilon-1)k$ 次の全単項式を表わす$)$ $(\varepsilon=1,2)$ を、y_λ の中を法として V'_λ 上に拡張する。例えば、$\tau^p=\{\tau^p_\lambda\}_\lambda$ についてやってみる:
今、p を一つ決めて p は略して書く。$\tau_\lambda\in\Gamma(D\times U'_\lambda, \mathcal{O})$ の V'_λ 上への拡張を $t_\lambda\in\Gamma(V'_\lambda,\mathcal{O})$ とすれば、$t_\lambda - e_{\lambda\mu}^{-1}t_\mu$ は S 上で 0 になるから、或る正則関数 $g^{(1)}_{\lambda\mu}\in\Gamma(V'_\lambda\cap V'_\mu,\mathcal{O})$ があって、$t_\lambda - e_{\lambda\mu}^{-1}t_\mu = y_\lambda g^{(1)}_{\lambda\mu}$ と書ける。

$g^{(1)}_{\lambda\mu} + e_{\lambda\mu}^{-2}g^{(1)}_{\mu\nu} = g^{(1)}_{\lambda\nu}$ だから、$\{g^{(1)}_{\lambda\mu}\}\in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}([S]^{-2}))$ である。ここで、V' の covering $\{V'_\lambda\}$ を $\mathcal{V}$ で、$V'\cap S$ の covering $\{D\times U'_\lambda\}$ を $\mathcal{U}$ で表わす。$g^{(1)}_{\lambda\mu}$ の S 上への制限を $\psi^{(1)}_{\lambda\mu}$ とすれば、$\{\psi^{(1)}_{\lambda\mu}\}\in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}([e]^{2k}))$ である。
$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}([e]^{2k}))=0$ を使うと、$\psi^{(1)}_\lambda\in\Gamma(D\times U'_\lambda,\mathcal{O})$ があって、$\psi^{(1)}_{\lambda\mu} = \psi^{(1)}_\lambda - \varepsilon_{\lambda\mu}^{2k}\psi^{(1)}_\mu$ となる。$\psi^{(1)}_\lambda$ の V'_λ への拡張を $g^{(1)}_\lambda\in\Gamma(V'_\lambda,\mathcal{O})$ とし、$t^{(2)}_\lambda \equiv t_\lambda - y_\lambda g^{(1)}_\lambda$

とすれば. $t_\lambda^{(2)} - e_{\lambda\mu}^{-1} t_\mu^{(2)}$ は. S 上で. $(y_\lambda)^2$ を法として 0になる. 従って 或る $g_{\lambda\mu}^{(2)} \in \Gamma(V'_\lambda \cap V'_\mu, \mathcal{O})$ があって. $t_\lambda^{(2)} - e_{\lambda\mu}^{-1} t_\mu^{(2)} = (y_\lambda)^2 g_{\lambda\mu}^{(2)}$ と書ける. このとき. $\{g_{\lambda\mu}^{(2)}\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}([S]^{-3}))$ である. 以下. 同様にして. 才 l 段階で. $t_\lambda^{(l)} - e_{\lambda\mu}^{-1} t_\mu^{(l)} = (y_\lambda)^l g_{\lambda\mu}^{(l)}$, $\{g_{\lambda\mu}^{(l)}\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}([S]^{-l-1}))$ を得る. この操作を z^j, $\omega^\rho(\varepsilon) = \{\omega_\lambda^\rho(\varepsilon)\}_\lambda$ にもやって. z_λ^j, t_λ^ρ, $w_\lambda^\rho(\varepsilon) \in \Gamma(V'_\lambda, \mathcal{O})$ を. 次を満たすようにできる:

$$
\begin{cases}
z_\lambda^j - z_\mu^j = (y_\lambda)^l f_{\lambda\mu}^j, & \{f_{\lambda\mu}^j\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}([S]^{-l})) \\
t_\lambda^\rho - e_{\lambda\mu}^{-1} t_\mu^\rho = (y_\lambda)^l g_{\lambda\mu}^\rho, & \{g_{\lambda\mu}^\rho\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}([S]^{-l-1})) \\
w_\lambda^\rho(\varepsilon) - k_{\lambda\mu}^{-1} e_{\lambda\mu}^{-\varepsilon} w_\mu^\rho(\varepsilon) = (y_\lambda)^l h_{\lambda\mu}^\rho(\varepsilon), & \\
& \{h_{\lambda\mu}^\rho(\varepsilon)\} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(K^{-1} \otimes [S]^{-l-\varepsilon})) \quad (\varepsilon = 1, 2).
\end{cases}
$$

C^∞-関数芽の層は *fine sheaf* だから.

$$
\begin{cases}
f_{\lambda\mu}^j = F_\lambda^j - e_{\lambda\mu}^{-l} F_\mu^j, & F_\lambda^j \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty) \\
g_{\lambda\mu}^\rho = G_\lambda^\rho - e_{\lambda\mu}^{-l-1} G_\mu^\rho, & G_\lambda^\rho \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty) \\
h_{\lambda\mu}^\rho(\varepsilon) = H_\lambda^\rho(\varepsilon) - k_{\lambda\mu}^{-1} e_{\lambda\mu}^{-l-\varepsilon} H_\mu^\rho(\varepsilon), & H_\lambda^\rho(\varepsilon) \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty) \quad (\varepsilon = 1, 2)
\end{cases}
$$

と表わされる.

$Z^j \equiv z_\lambda^j - (y_\lambda)^l F_\lambda^j$ は V' 全体での C^∞-関数である.

又. $T_\lambda^\rho \equiv t_\lambda^\rho - (y_\lambda)^l G_\lambda^\rho \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty)$,

$W_\lambda^\rho(\varepsilon) \equiv w_\lambda^\rho(\varepsilon) - (y_\lambda)^l H_\lambda^\rho(\varepsilon) \in \Gamma(V'_\lambda, C^\infty)$ とすれば.

$\{T_\lambda^\rho\}_\lambda \in \Gamma(V', C^\infty([S]^{-1}))$, $\{W_\lambda^\rho(\varepsilon)\}_\lambda \in \Gamma(V', C^\infty(K^{-1} \otimes [S]^{-\varepsilon}))$ $(\varepsilon = 1, 2)$ である.

そこで $A_\lambda \equiv \sum_{\rho=1}^{N+1} |T_\lambda^\rho|^2$, $B_\lambda^{(\varepsilon)} \equiv \sum_\rho |W_\lambda^{\rho(\varepsilon)}|^2$

とおくと、$A_\lambda |y_\lambda|^2 = A_\mu |y_\mu|^2$ から、

$\psi \equiv \phi(Z) + e^{\phi(Z)} A_\lambda |y_\lambda|^2$ は、V' 全体での

C^∞-関数である。

$(\tau_\lambda^1, \cdots, \widehat{\tau_\lambda^{\rho(\lambda)} \equiv 1}, \cdots, \tau_\lambda^{N+1})$ は、$(\xi_\lambda^1, \cdots, \widehat{\xi_\lambda^{\sigma(\lambda)} \equiv 1}, \cdots, \xi_\lambda^r)$ の、1次から k 次までの単項式全体だから、それらの拡張 $(t_\lambda^1, \cdots, \widehat{t_\lambda^{\rho(\lambda)} \equiv 1}, \cdots, t_\lambda^{N+1})$ は、$(x_\lambda^1, \cdots, \widehat{x_\lambda^{\sigma(\lambda)} \equiv 1}, \cdots, x_\lambda^r)$ の、1次から k 次までの単項式全体とできる。このとき、

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\beta}\left(\sum_\rho |T^\rho|^2\right) = x^\beta(1 + P_\beta(x)) + y^\ell(\quad) + \bar{y}^\ell(\quad) + |y|^{2\ell}(\quad),$$

$$\sum_\rho t^\rho \frac{\partial \bar{t}^\rho}{\partial \bar{x}^\beta} \equiv x^\beta(1 + P_\beta(x)) \quad (\beta = 1, \cdots, r),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial \bar{x}^\beta}\left(\sum_\rho |T^\rho|^2\right) = \delta_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}(x) + y^\ell(\quad) + \bar{y}^\ell(\quad) + |y|^{2\ell}(\quad),$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(x^\beta P_\beta(x)) \equiv Q_{\alpha\beta}(x) \quad (\alpha, \beta = 1, \cdots, r).$$

である。$P_\beta(x)$, $Q_{\alpha\beta}(x)$ は共に、x の $(2k-2)$ 次の多項式で、例えば、$k=2$ のとき、$P_\beta(x) = 2|x^\beta|^2 + \sum_{\beta_1 \neq \beta} |x^{\beta_1}|^2$,

$$Q_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} 4|x^\alpha|^2 + \sum_{\alpha_1 \neq \alpha} |x^{\alpha_1}|^2 & (\alpha = \beta) \\ \bar{x}^\alpha x^\beta & (\alpha \neq \beta) \end{cases}$$

のような形をしている。

$\psi = \phi(Z) + e^{\phi(Z)}\left(\sum_\rho |T_\lambda^\rho|^2\right)|y_\lambda|^2$ の *Levi form* を評価する： V'_λ を一つ決めて、λ は省略する。V'_λ は、小さく取り直してもよいから、$G > 0$ を大きく取って、

$\sum_\alpha' |x^\alpha|^2 < G$ と考えてよい（$\sum_\alpha'$ は $\alpha = 1, \cdots, \widehat{\sigma(\lambda)}, \cdots, r$ の和を表わす）． $\eta > 0$ を $\eta G < \frac{1}{3}$ のように取る．

$l \geqq 3$ のとき

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} & \frac{\partial^2\psi}{\partial z^j \partial \bar{y}} & \frac{\partial^2\psi}{\partial z^j \partial \bar{x}^\beta} \\ & \frac{\partial^2\psi}{\partial y \partial \bar{y}} & \frac{\partial^2\psi}{\partial y \partial \bar{x}^\beta} \\ & & \frac{\partial^2\psi}{\partial x^\alpha \partial \bar{x}^\beta} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{jk} + O(|y|^2) & e^{\phi(Z)}(1+\sum_p |t^p|^2)\{y\bar{z}^j + O(|y|^2)\} & e^{\phi(Z)}|y|^2\{\bar{z}^j x^\beta(1+P_\beta) + O(|y|)\} \\ & e^{\phi(Z)}(1+\sum_p' |t^p|^2) + O(|y|^2) & e^{\phi(Z)}\bar{y}\{x^\beta(1+P_\beta) + O(|y|)\} \\ & & e^{\phi(Z)}|y|^2\{\delta_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta} + O(|y|)\} \end{bmatrix}.$$

$y = 0$ のとき

$$\begin{bmatrix} \delta_{jk} & & 0 \\ & e^{\phi(S)}(1+\sum' |t^p|^2) & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \geqq 0.$$

$y \neq 0$ のとき

$$(1+\sum_p' |t^p|^2)(dy, d\bar{y}) + \sum_\alpha' y\bar{x}^\alpha(1+P_\alpha)(dx^\alpha, d\bar{y})$$
$$+ \sum_\beta' \bar{y}x^\beta(1+P_\beta)(dy, d\bar{x}^\beta) + \sum_{\alpha,\beta}' |y|^2(\delta_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta})(dx^\alpha, d\bar{x}^\beta)$$
$$= |dy|^2 + \sum_\alpha' |x^\alpha dy + y dx^\alpha|^2 + \sum_\alpha' |x^\alpha|^2 |x^\alpha dy + 2y dx^\alpha|^2$$
$$+ \sum_{\alpha<\beta}' |x^\alpha x^\beta dy + y x^\beta dx^\alpha + y x^\alpha dx^\beta|^2 + \sum' |\cdots|^2 + \cdots + \sum' |\cdots|^2$$
$$\geqq |dy|^2 + \sum_\alpha' |x^\alpha dy + y dx^\alpha|^2$$
$$= |dy|^2 + \sum_\alpha' \{ |(1+\eta)^{\frac{1}{2}} x^\alpha dy + (1+\eta)^{-\frac{1}{2}} y dx^\alpha|^2 - \eta |x^\alpha|^2 |dy|^2 + (1 - \tfrac{1}{1+\eta})|y|^2 |dx^\alpha|^2 \}$$
$$\geqq \{1 - \eta(\sum_\alpha' |x^\alpha|^2)\} |dy|^2 + |y|^2 \sum_\alpha' \frac{\eta}{1+\eta} |dx^\alpha|^2.$$

$|y| > 0$ が小のとき　$1 - \eta(\sum_\alpha' |x^\alpha|^2) + O(|y|^2) > \frac{2}{3}$,
$\left(\frac{\eta}{1+\eta}\delta_{\alpha\beta} + O(|y|)\right) > 0$ とできる．後ろの Hermite 行列の最

小固有値 $\lambda>0$ である.

$$\sum_\alpha{}' e^{\phi(Z)} y\,\overline{a_\alpha}\,(dx^\alpha, d\bar y) + \sum_\beta{}' e^{\phi(Z)} \bar y\, a_\beta\,(dy, d\bar x^\beta)$$

$$\geqq -\left(\sum_\alpha{}' |a_\alpha|\right)|dy|^2 - e^{\phi(Z)}|y|^2 \sum_\alpha{}' \left(e^{\phi(Z)}|a_\alpha|\right)|dx^\alpha|^2$$

(a_α は $O(|y|)$ の量).

従って. 右下の4つの部分

$$\geqq \left[e^{\phi(Z)}\left\{1-\eta\left(\sum_\alpha{}'|x^\alpha|^2\right)+O(|y|^2)\right\} - \left(\sum_\alpha{}'|a_\alpha|\right)\right]|dy|^2$$

$$+\, e^{\phi(Z)}|y|^2\left[\sum_{\alpha,\beta}{}'\left(\frac{\eta}{1+\eta}\delta_{\alpha\beta}+O(|y|)\right)(dx^\alpha, d\bar x^\beta) - \sum_\alpha{}'\left(e^{\phi(Z)}|a_\alpha|\right)|dx^\alpha|^2\right]$$

必要ならば. $|y|>0$ を更に小さくして

$$\geqq \frac{\eta}{12}|dy|^2 + e^{\phi(Z)}|y|^2 \sum_\alpha{}' \frac{\lambda}{2}|dx^\alpha|^2$$

とできる. 対角線以外の 残りの4つも. 共役なもの同志組にして. 下から評価してやれば. $|y|>0$ が小. $\phi(z)$ も小のとき. ψ の Levi form $\geqq \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m}|dz^j|^2 + |dy|^2\right)$ とできる. 故に. $|y|$ が小. $\phi(z)$ も小のとき. ψ の Levi form $\geqq 0$ がわかった.

$\varepsilon=1,2$ に対して. $C_\lambda^{(\varepsilon)} \equiv B_\lambda^{(\varepsilon)} e^{\ell\psi}$ とおけば. $\{C_\lambda^{(\varepsilon)}\}_\lambda$ は $K_V^{-1}\otimes[S]_V^{-\varepsilon}$ の fibre metric を与える. $\ell\geqq 3$ のとき.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^j\partial \bar z^k}\log C_\lambda^{(\varepsilon)} & \frac{\partial^2}{\partial z^j\partial \bar y}\log C_\lambda^{(\varepsilon)} & \frac{\partial^2}{\partial z^j\partial \bar x^\beta}\log C_\lambda^{(\varepsilon)} \\ & \frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar y}\log C_\lambda^{(\varepsilon)} & \frac{\partial^2}{\partial y\partial \bar x^\beta}\log C_\lambda^{(\varepsilon)} \\ & & \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial \bar x^\beta}\log C_\lambda^{(\varepsilon)} \end{bmatrix}$$

は. S 上に制限すると

$$\begin{bmatrix} l\frac{\partial^2}{\partial\zeta^j\partial\bar{\zeta}^k}\left(\sum_{i=1}^{m}|\zeta^i|^2\right) & & \bigcirc \\ & l e^{\phi(\zeta)}\left(1+\sum_{p=1}^{N+1}{}'|t^p|^2\right) & \\ \bigcirc & & \frac{\partial^2}{\partial\xi^\alpha\partial\bar{\xi}^\beta}\log\left(\sum_\rho|\omega^\rho(\varepsilon)|^2\right) \end{bmatrix}$$

>0.

従って、$|t|$ が小のとき $K_{V'}^{-1}\otimes[S]_{V'}^{-\varepsilon}>0$ $(\varepsilon=1,2)$ である。十分小なる $\delta>0$ に対して、$V\equiv\{\psi<\delta\}\subset\subset V'$ とできるから V は、$\Phi\equiv\left(1-\frac{\psi}{\delta}\right)^{-1}$ に関して weakly 1-complete、$K_V^{-1}\otimes[S]_V^{-\varepsilon}>0$ $(\varepsilon=1,2)$ である。(終)

4. X を構成する。点 $a\in M$ に対して、定理2(k)にいう L_a の近傍 V を取れば、$V\cap S\approx D\times\mathbb{P}$、$[S]_{V\cap S}=[e]^{-k}$ である。

cohomology の消滅定理1から、$H^1(V,\mathcal{O}([S]^{-\varepsilon}))=0$ $(\varepsilon=1,2)$ を得る。これを、層の完全列：$0\to\mathcal{O}([S]^{-1})\to\mathcal{O}_V\to\mathcal{O}_{V\cap S}\to 0$、$0\to\mathcal{O}([S]^{-2})\to\mathcal{O}([S]^{-1})\to\mathcal{O}_{V\cap S}([S]_{V\cap S}^{-1})\to 0$ から得られる cohomology の完全列に使って、制限写像：

$\Gamma(V,\mathcal{O}_V)\to\Gamma(V\cap S,\mathcal{O}_{V\cap S})$、$\Gamma(V,\mathcal{O}([S]^{-1}))\to\Gamma(V\cap S,\mathcal{O}([e]^k))$

が全射となる。故に、D 上の局所座標 $\zeta^j\in\Gamma(D\times\mathbb{P},\mathcal{O})$ の拡張 $z^j\in\Gamma(V,\mathcal{O}_V)$ $(j=1,\cdots,m)$、及び $[e]^k$ の sections $\{t_\lambda^p\}_\lambda$ の拡張 $\{s_\lambda^p\}_\lambda\in\Gamma(V,\mathcal{O}([S]^{-1}))$ $(p=1,\cdots,N+1)$ が存在し、同型：$\Gamma(V,\mathfrak{I}(S))\approx\Gamma(V,\mathcal{O}([S]^{-1}))$ （$\mathfrak{I}(S)$ は、

$\mathcal{S}$ の定義する idealの層）により、$f^p \equiv g_\lambda f_\lambda^p \in \Gamma(V, \mathcal{I}(\mathcal{S}))$ が決まる（$V = \bigcup_\lambda V'_\lambda$ と、座標近傍で cover しておく）.

$$\begin{array}{rcl} \Phi : V = \bigcup_\lambda V'_\lambda & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \times \widetilde{\mathbb{C}}^{N+1} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ p & \longmapsto & \left((z^1(p), \dots, z^m(p)), (f^1(p), \dots, f^{N+1}(p)), (f^1(p) : \dots : f^{N+1}(p)) \right) \end{array}$$

なる *holomorphic mapping* は、L_a の各点で rank n、$\Phi(L_a) \approx (0) \times \mathbb{P}^{r-1}$ である. 従って、L_a の近傍 W と $0 \in \mathbb{C}^m$ の近傍 $D' \subset D$ を適当に取って、$\Phi(W) = D' \times \widehat{K}$ とできる. $D' \times \widehat{K}$ は、$\Delta^* \equiv D' \times K$ を $\Gamma \equiv D' \times (0)$ を中心として blow-up したもので、$D' \times \widehat{K} - D' \times T \approx D' \times K - D' \times (0)$ より $W - \mathcal{S} \approx \Delta^* - \Gamma$ である. 又、Γ は、M に於ける a の近傍と同一視できる.

M の各点 a 毎に、このような $W_a, \Delta_a^*, \Gamma_a$ を作れば、$\pi_a : W_a \to \Delta_a^*$, onto *holomorphic* s.t. 1) $W_a - \mathcal{S} \approx \Delta_a^* - \Gamma_a$, 2) $W_a \supset \mathcal{S}$ (codim 1), 3) $\pi_a : \mathcal{S} \xrightarrow{\mathbb{P}^{r-1}} \Gamma_a$, 4) $[\mathcal{S}]_{L_b} = [e]^{-k}$ for $\forall b \in D'_a$ となっている. $W_a \cap W_b \neq \phi$ のとき

$$\begin{array}{ccccccc} W_a & \supset & W_a \cap W_b & \overset{id.}{=\!=} & W_a \cap W_b & \subset & W_b \\ \pi_a \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi_b \\ \Delta_a^* & \supset & \pi_a(W_a \cap W_b) & \xrightarrow{\phi_{ab}} & \pi_b(W_a \cap W_b) & \subset & \Delta_b^* \end{array}$$

$\phi_{ab} \equiv \pi_b \circ id \circ \pi_a^{-1} : \pi_a(W_a \cap W_b) - \Gamma_a \xrightarrow{\approx} \pi_b(W_a \cap W_b) - \Gamma_b$ なる *biholomorphic* map は、$\pi_a(W_a \cap W_b) \to \pi_b(W_a \cap W_b)$ に、連続に拡張でき、*homeomorphic* になる. Δ^* は $\mathbb{C}^{m+N+1}$ の

normal analytic set だから，$\phi_{ab}: \Pi_a(W_a \cap W_b) \xrightarrow{\sim} \Pi_b(W_a \cap W_b)$ は，解析空間としての同型を与える．故に，$\{\Delta_a^*\}$，$\{\Gamma_a\}$ はうまくつながって，解析空間 X^* と，その特異点の全体（それ自身は X^* の部分多様体で，M と同型）をなす．

$\bigcup_{a \in M} W_a$ は S を cover している．

$X \equiv (\hat{X} - S) \cup X^* = (\tilde{X} - \bigcup_{a \in M} W_a) \cup (\bigcup_{a \in M} \Delta_a^*)$ が求めるものである．

参考文献

[1] A. Fujiki - S. Nakano, Supplement to "On the inverse of monoidal transformation", Publ. R.I.M.S., Vol. 7 (1971-72), pp. 637-644.

[2] S. Nakano, On the inverse of monoidal transformation, Publ. R.I.M.S., Vol. 6 (1970-71), pp. 483-502.